

MODELING MATEMATIK ALIRAN DI SUNGAI DENGAN METODE BEDA HINGGA

FLOW MODELLING OF MATHEMATIC IN RIVER WITH FINITE DIFFERENCE METHOD

Nieke Karnaningroem¹⁾, Nadjadji Anwar²⁾, Basuki Widodo³⁾, Aditya Maharani³⁾
dan Retno Winahyu¹⁾

¹⁾Jurusan Teknik Lingkungan FTSP – ITS

²⁾Jurusan Sipil FTSP – ITS

³⁾Jurusan Matematika FMIPA -ITS

Abstrak

Salah satu cara untuk mengidentifikasi arah penyebaran polutan di sungai dan mendapatkan hasil penelitian yang mendekati sebenarnya dengan menggunakan model matematik. Kajian dari model tersebut diselesaikan dengan menerapkan metode beda hingga, yang dalam hal ini menggunakan metode beda hingga eksplisit Leap frog. Hal ini dikarenakan metode tersebut relatif mudah untuk ditangani. Untuk membuat struktur model matematik selain metode beda hingga diperlukan juga hukum dasar hidrodinamika aliran di sungai yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan gerak atau momentum. Tanpa kedua persamaan tersebut pembaganan Leap frog tidak dapat dibuat. Sebagai solusi numerik, untuk mencapai keberhasilan model matematik aliran air di sungai dengan menggunakan metode beda hingga eksplisit Leap Frog tersebut, tergantung pada rasio dari pembaganan waktu dan ruang. Dalam hal ini berarti kajian stabilitas numerik dari model harus dipenuhi persyaratannya.

Kata kunci : hidrodinamika aliran, metode beda hingga, modeling matematik, struktur model

Abstract

One way to identify the direction of dispersion pollutant in river and obtains result of research coming near in fact is by using mathematic model. Study from the model was finished by applying finite difference method, what in this case using the Leap frog finite difference method explicit. This is because the method is relatively easy to handle. To make the mathematic model structure besides applying finite difference method, basics law of stream hydrodynamics in river is also required which are equation of continuity and equation of motion or momentum. Without those two equations, scheme of Leap frog cannot be made. As numeric solution, to reach the success of mathematic modeling of flow in river by using the Leap frog finite difference method explicit, it also depends on ratio from scheme of time and space. In this case means the study of numeric stability from model have to be fulfilled by its conditions.

Keywords : finite difference method, mathematic modelling, model structure, stream hydrodynamics

1. PENDAHULUAN

Sungai mempunyai fungsi yang strategis bagi kelestarian lingkungan dan sebagai saluran drainase bagi suatu kawasan serta sebagai area penampungan air hujan. Air sungai akan membawa beberapa substansi limbah cair yang dibuang dan di dalam sungai tersebut proses fisik, kimia dan biologis akan terjadi. Selain itu sungai juga dimanfaatkan untuk berbagai tujuan yaitu bahan baku air bersih baik untuk domestik maupun untuk keperluan industri, sebagai area wisata air, sebagai tempat pembuangan limbah cair domestik dan industri dan masih banyak lagi. Pemanfaatan tersebut tidak jarang memberikan dampak negatif yang cukup serius ba-

gi kelestarian lingkungan sungai tersebut. Oleh sebab itu diperlukan upaya untuk meramalkan fenomena tersebut dengan melakukan rekayasa, yang tentunya memerlukan perangkat yang tidak murah, tidak mudah dan kompleks.

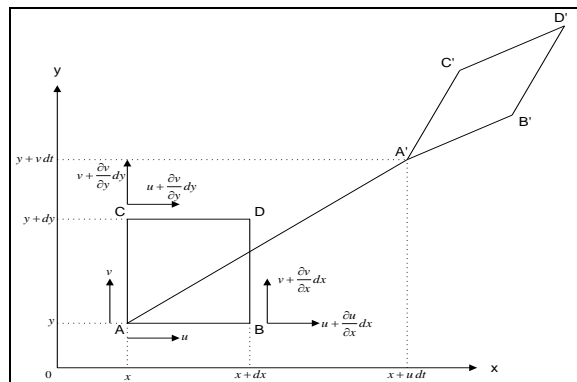
Ada dua model hidraulik sungai yang sering digunakan yaitu model numerik dan model fisik. Dalam model fisik, sungai dimodelkan dengan cara memperkecil fisik sungai dengan skala tertentu dan sangat untuk mempelajari proses-proses yang sangat kompleks. Sedangkan model numerik menggunakan pemecahan matematik dan menggunakan komputer yang dalam dekade terakhir ini berkembang dengan pesat, dan berguna untuk mengem-

bangkan alternatif desain. Model fisik relative lebih mahal karena memerlukan bangunan dan peralatan dalam pelaksanaannya. Oleh karena itu dalam makalah ini dicoba untuk menyajikan model matematik.

Guna mengetahui arah penyebaran polutan memerlukan model matematik, yang dalam kajian akan diselesaikan dengan metode beda hingga-eksplisit Leap frog, karena metode ini merupakan salah satu metode dengan perumusan yang relatif mudah dan memberikan hasil yang memuaskan.

Pada dinamika fluida, terdapat 3 komponen kecepatan u, v, w dan tekanan p di sembarang titik x, y, z dan pada sembarang waktu t yang pada umumnya merupakan fungsi x, y, z, t , adalah merupakan fungsi kontinu $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t), p(x, y, z, t)$, dan dengan turunan parsial orde satu dan kedua yang juga merupakan fungsi kontinu dari variabel bebasnya x, y, z , dan t . Selain itu, persamaan diferensial parsial dapat juga bermanfaat untuk variabel bebas tidak yang semuanya kontinyu. Seperti misalnya, $p(m, n, t)$ merupakan probabilitas, yang mana tidak diperoleh suatu persamaan diferensial parsial untuk $p(m, n, t)$ karena m dan n merupakan variabel nilai-integer tidak kontinyu (Slamet dan Karnaningroem, 2003).

Model matematika menurut Benedetti dan Sforzi (1999) adalah suatu model yang mewakili suatu sistem yang berdasarkan pada hubungan matematik dan dibangun berdasarkan fungsi dan struktur internal sistem, intervensi kontrol serta sensornya. Dan untuk ekspresi matematis gerakan partikelnya digambarkan dalam gerakan 1 dimensi, 2 dimensi seperti tampak pada Gambar 1. Sistem Koordinat Dua Dimensi dan bahkan 3 dimensi.



Gambar 1. Sistem Koordinat Dua Dimensi (Pratikto, 1988)

Menurut Pratikto (1988) elemen fluida ABCD (pada waktu t), komponen kecepatan u dan v merupakan fungsi x dan y seperti pada Persamaan 1.

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$$

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

(1)

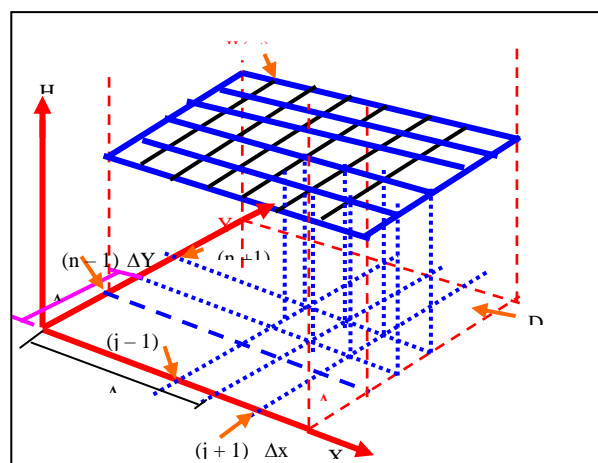
Pada waktu t, koordinat A adalah x, y dan titik D adalah $x+dx, y+dy$, sedangkan pada waktu $t+dt$, koordinat pada titik A dan D akan berubah menjadi Persamaan 2.

$$A' \begin{cases} x + u dt \\ y + v dt \end{cases}$$

$$D' \begin{cases} x + dx + (u + du) dt \\ y + dy + (v + dv) dt \end{cases}$$

(2)

Metode beda hingga merupakan hasil penurunan secara matematik, selanjutnya guna memahami prinsip dasar metode beda hingga diperlukan peninjauan pada fungsi level air H sebagai fungsi dari dua variabel bebas x dan y dengan daerah tertentu D didalam kondisi cartesian pada Gambar 2. Daerah wilayah D dibagi ke dalam kisi-kisi dengan panjang Δx dan Δy , dan kisi-kisi tersebut mempunyai panjang tetap yaitu dalam arah sumbu x adalah Δx dan dalam arah sumbu y adalah Δy .



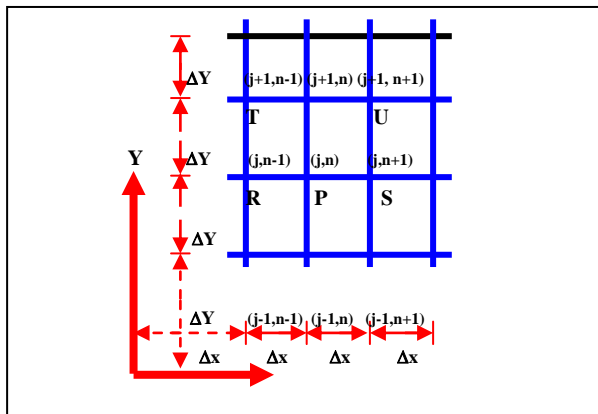
Gambar 2. Fungsi $H(x, y)$ (Widodo dan Wardhani, 1994)

Dalam metode beda hingga dicari harga pendekatan nilai H dititik titik kisi, dan nilai H ataupun turunannya pada titik tertentu pada daerah D tersebut dianggap sebagai suatu pendekatan atau seba-

gai fungsi dari nilai H dititik titik kisi sekitarnya. Sebagai contoh yang akan ditinjau titik P pada Gambar 3, maka harga H dan $\partial H/\partial x$ di P dapat dianggap sebagai fungsi dari H di R, S, T atau U dan ditulis menjadi Persamaan 3.

$$H(x, t)_p = F \{H(R), H(S), H(T), H(U)\} \quad (3)$$

Dan persamaan 3 diatas merupakan harga pendekatan dari H dan $\partial H/\partial x$ di P . Pendekatan atau hubungan fungsi ini dapat dicari dengan deret Taylor disekitar titik tersebut atau menggunakan interpolasi polinomial.



Gambar 3. Daerah Dibagi dalam Kisi-Kisi (Widodo dan Wardhani, 1994)

Pendekatan dengan harga variasi yang tidak diketahui dan turunan yang lain seperti debit (Q) dan konsentrasi polutan (C) dapat dilakukan dengan cara yang sama. Hasil pendekatan harga H, Q dan C serta turunannya selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial aliran air dan angkutan polutan supaya dapat diperoleh persamaan baru yaitu persamaan diferensial terkeping yang terdiri atas harga-harga tidak diketahui dititik titik kisi. Selanjutnya persamaan ini baru diselesaikan untuk memperoleh harga harga yang tidak diketahui di titik kisi. Dan untuk hasil pendekatan harga H, Q dan C serta turunan selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan diferensial aliran air dan angkutan polutan, sehingga diperoleh persamaan baru yaitu persamaan diferensial terkeping yang atas harga-harga yang tidak diketahui dititik titik kisi. Persamaan baru tersebut selanjutnya diselesaikan untuk memperoleh harga-harga yang tidak diketahui di titik kisi.

2. METODOLOGI

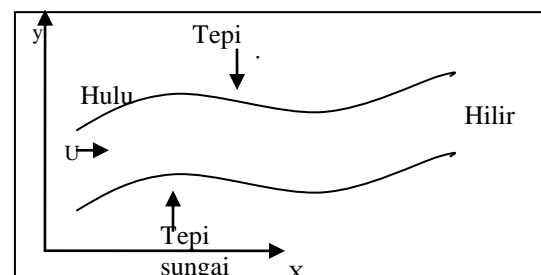
Adapun garis besar dari penelitian ini adalah membuat struktur model matematik aliran air di sungai

dengan pendekatan metode beda hingga eksplisit Leap frog. Pembuatan model disusun berdasarkan isu bahwa model matematik yang beredar di Indonesia masih menggunakan pola model yang parsial, satu dimensi dan *steady state*.

Di sisi lain model fisik untuk sungai butuh biaya yang sangat mahal dan memerlukan peralatan yang relative amat kompleks. Selain itu model matematik disusun berdasarkan hidrodinamika aliran di sungai dengan menggunakan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Sedangkan struktur model matematik disusun dengan metode beda hingga eksplisit-Leap frog, karena relatif sederhana dan mudah dalam aplikasinya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses-proses yang dapat terjadi dalam aliran air di sungai yang pertama adalah proses fisik yang meliputi adveksi atau konveksi akibat dari gerakan arus air, difusi dan dispersi akibat proses difusi molekuler dan turbulensi aliran air. Kedua proses kimia yaitu proses yang berkaitan dengan zat kimia yang berada di dalam air sungai pada saat mengalir, sedangkan yang ketiga adalah proses biologi. Semua proses tersebut dapat dimodelkan dengan menerapkan hukum-hukum kekekalan massa ataupun kekekalan energi. Berikut berdasarkan uraian diatas, perumusan model matematika aliran di sungai memerlukan persamaan dasar yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan gerak. Persaman kontinuitas diturunkan dari konservasi massa sedangkan persamaan gerak diturunkan dari konsevasi momentum. Dan dalam perumusan model ini air sungai dipandang sebagai fluida yang tak mampu mampat dengan rapat massa konstan. Dan dalam penyusunan struktur model matematika yang dirumuskan model aliran sungainya seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Skematik Aliran Air di Sungai

Berdasarkan skema aliran air di sungai, untuk menghasilkan persamaan kontinuitas diperlukan

penurunan persamaan dari konservasi massa atau yang biasa disebut dengan hukum kekekalan massa yang mana massa tidak dapat diciptakan maupun dimusnahkan dan dirumuskan pada Persamaan 4.

$$\frac{d}{dt}(\text{mass}) + \text{net outward mass flux} = 0. \quad (4)$$

Dan berdasarkan persamaan konservasi massa tersebut, aliran air di sungai dua dimensi dalam arah sumbu x dan y dengan kecepatan air di hulu sungai sebesar U, kecepatan aliran u di permukaan sungai dalam arah sumbu x, kecepatan aliran v di permukaan sungai dalam arah sumbu y, luas penampang sungai sebesar A, volume ∇ dan dalam selang waktu sebesar t, besaran nilai konservasi massanya dapat dirumuskan dalam Persamaan 5.

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \rho U A|_{KN} - \rho U A|_{KR} + \rho U A|_{AT} - \rho U A|_{BW} = 0 \quad (5)$$

dan apabila persamaan tersebut dijabarkan dan disederhanakan akan menjadi Persamaan 6.

$$\frac{\partial \rho \Delta x \Delta y}{\partial t} + \rho u \Delta y|_{KN} - \rho u \Delta y|_{KR} + \rho v \Delta x|_{AT} - \rho v \Delta x|_{BW} = 0 \quad (6)$$

akhirnya dirumuskan menjadi Persamaan 7.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

Demikian pula untuk mendapatkan persamaan gerak berikut diperlukan penurunan persamaan konservasi momentum yang mana menggunakan dasar acuan hukum Newton II dengan ketentuan bahwa laju perubahan momentum yang terjadi sama dengan gaya, yang berarti konservasi momentum dapat dirumuskan dalam Persamaan 8.

$$\frac{d}{dt}(\text{momentum}) + \text{net outward momentum flux} = \text{gaya}. \quad (8)$$

Untuk konservasi momentum, aliran air di sungai dua dimensi dapat dilihat pada Persamaan 9.

$$\frac{\partial \rho \nabla U}{\partial t} + \rho U A|_{KN} - \rho U A|_{KR} + \rho U A|_{AT} - \rho U A|_{BW} = F \quad (9)$$

apabila persamaan tersebut ini dijabarkan dan disederhanakan akan menjadi Persamaan 10 dan 11.

$$\frac{\partial \rho \Delta x \Delta y U}{\partial t} + \rho u \Delta y|_{KN} - \rho u \Delta y|_{KR} + \rho v \Delta x|_{AT} - \rho v \Delta x|_{BW} = F \quad (10)$$

atau

$$\left[\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho u U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v U}{\partial y} \right] \Delta x \Delta y = F \quad (11)$$

dan akan menjadi Persamaan 12.

$$\left[\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho u U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v U}{\partial y} \right] = \frac{F}{\Delta x \Delta y} \quad (12)$$

Aliran air sungai di alam biasanya berada dalam 3 (tiga) kondisi aliran yaitu aliran laminar, transisi dan turbulen.

Pada aliran laminar nilai $\partial U / \partial h$ yang merupakan rasio dari kecepatan aliran air di permukaan dan kedalaman sungai $\partial U / \partial h = U / h$, persamaan momentum dapat dilihat pada Persamaan 13 dan 14.

$$\left[\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho u U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v U}{\partial y} \right] - \frac{[P_o + \rho g h] h}{\Delta x} - \mu \frac{\partial U}{\partial h} \frac{h}{\Delta x} = 0 \quad (13)$$

atau

$$\left[\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho u U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v U}{\partial y} \right] - \frac{[P_o + \rho g h] h}{\Delta x} - \mu \frac{U}{\Delta x} = 0 \quad (14)$$

Demikian pula untuk aliran turbulen dimana selain kecepatan aliran U juga terjadi skalar kecepatan sehingga persamaan momentum tersebut menjadi Persamaan 15.

$$\left[\frac{\partial \rho U}{\partial t} + \frac{\partial \rho u U}{\partial x} + \frac{\partial \rho v U}{\partial y} \right] - \frac{[P_o + \rho g h] h}{\Delta x} - \mu \frac{U}{\Delta x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Jaringan titik hitung pada bidang x – y yang dapat dibagi dalam sejumlah pias segi empat dengan sisi Δx dan Δy, yang mana Δx dan Δy merupakan panjang pias pada arah sumbu x dan sumbu y. Dan selanjutnya dengan menggunakan jaringan titik maka bentuk turunan pertama diferensial dalam metode beda hingga (Triatmodjo, 2002).

Persamaan diferensial melintang dapat dilihat pada Persamaan 16 dan 17.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mathcal{G}_{i+1,j} - \mathcal{G}_{i-1,j}}{2\Delta y} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = \frac{\mathcal{G}_{i-1,j} - 2\mathcal{G}_{i,j} + \mathcal{G}_{i+1,j}}{\Delta y^2} \quad (16)$$

dan

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x \partial y} = \frac{\mathcal{G}_{i+1,j+1} - \mathcal{G}_{i-1,j-1} - \mathcal{G}_{i+1,j-1} + \mathcal{G}_{i-1,j+1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (17)$$

Dan untuk persamaan yang mengandung variabel x dan t, perkiraan beda hingga pada jaringan titik hitung x-t yang dibagi dalam sejumlah pias dengan

interval ruang Δx dan waktu Δt bentuk turunan pertama dan kedua pada Persamaan 18.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mathcal{G}_i^{n+1} - \mathcal{G}_i^n}{\Delta t} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} = \frac{\mathcal{G}_{i-1}^n - 2\mathcal{G}_i^n + \mathcal{G}_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (18)$$

untuk persamaan yang mengandung variabel y dan t , perkiraan beda hingga pada jaringan titik hitung $y - t$ yang dibagi dalam sejumlah pias dengan interval ruang Δy dan waktu Δt bentuk turunan pertama dan kedua pada Persamaan 19.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\mathcal{G}_i^{n+1} - \mathcal{G}_i^n}{\Delta t} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = \frac{\mathcal{G}_{i-1}^n - 2\mathcal{G}_i^n + \mathcal{G}_{i+1}^n}{\Delta y^2} \quad (19)$$

Penyusunan model matematik adalah metode beda hingga-eksplisit Leap frog. Sehingga Pada metode eksplisit, variabel pada waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang sudah diketahui. Metode eksplisit Leap Frog dua dimensi bentuk fungsi dan turunannya didekati dengan bentuk beda hingga.

Dan untuk penurunan setiap sukunya pada persamaan kontinuitas pada Persamaan 20

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

Sedangkan penurunan setiap suku pada momentum pada aliran laminar arah sumbu x pada Persamaan 21 dan 22.

$$u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + 2\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + v\rho \frac{\partial u}{\partial y} + \rho u \frac{\partial v}{\partial y} + uv \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} = 0 \quad (21)$$

atau

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} = 0, \quad (22)$$

selanjutnya penurunan tiap suku persamaan momentum dengan kondisi aliran laminar terhadap sumbu x pada Persamaan 23.

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} = 0 \quad (23)$$

Untuk arah sumbu y penurunan tiap suku pada Persamaan 24 dan 25.

$$v \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u}{\partial x} + uv \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + 2v\rho \frac{\partial v}{\partial y} + v^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} = 0 \quad (24)$$

atau

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] + v \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} = 0, \quad (25)$$

Selanjutnya penurunan tiap suku persamaan momentum dengan kondisi aliran laminar terhadap sumbu y pada Persamaan 26

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} = 0 \quad (26)$$

Untuk aliran turbulen arah sumbu x dengan persamaan momentum pada Persamaan 27

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

dengan penurunan tiap suku pada Persamaan 28

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

Dan untuk aliran turbulen arah sumbu y dengan persamaan momentum pada Persamaan 29

$$\left[\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{\partial v}{\partial h} \frac{h}{\Delta x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

Penurunan tiap suku persamaan momentumnya pada Persamaan 30

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

Berdasarkan pada metode Leap frog, maka disusun struktur matematik persamaan kontinuitas pada Persamaan 31

$$\rho_{i,j}^{n+1} = \rho_{i,j}^{n-1} - 2\Delta t \left[\rho_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + u_{i,j}^n \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \rho_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + v_{i,j}^n \frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] \quad (31)$$

Berikut berdasarkan pada metode Leap frog, maka struktur matematik persamaan momentum dapat di lihat pada Persamaan 32 sampai Persamaan 35 untuk aliran laminier.

Pada sumbu x

$$\rho_{i,j}^n \left[\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} = 0 \quad (32)$$

, atau

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n-1} - 2\Delta t \left[u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + \frac{2\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[\frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} + \mu \frac{u}{\Delta x} \right] \quad (33)$$

Pada sumbu y

$$\rho_{i,j}^n \left[\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} = 0 \quad (34)$$

atau

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n-1} - 2\Delta t \left[u_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + \frac{2\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[\frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} + \mu \frac{v}{\Delta x} \right] \quad (35)$$

Berdasarkan pada metode Leap frog, maka struktur matematik persamaan momentum dapat dilihat pada Persamaan 36 sampai Persamaan 39 untuk aliran turbulen.

Pada sumbu x

$$\rho_{i,j}^n \left[\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{u}{\Delta x} + E \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (36)$$

atau

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n-1} - 2\Delta t \left[u_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + \frac{2\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[\frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} + \mu \frac{u}{\Delta x} - E \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \quad (37)$$

Pada sumbu y

$$\rho_{i,j}^n \left[\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] - \frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} + E \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} - \mu \frac{v}{\Delta x} + E \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} = 0$$

, atau

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n-1} - 2\Delta t \left[u_{i,j}^n \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + v_{i,j}^n \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] + \frac{2\Delta t}{\rho_{i,j}^n} \left[\frac{[Po + \rho gh]h}{\Delta x} + \mu \frac{v}{\Delta x} - E \frac{\Phi_{i+1,j}^n - \Phi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \quad (39)$$

4. KESIMPULAN

Model matematik aliran air di sungai dibangun di bangun berdasarkan pada persamaan diferensial parsial yang didasari oleh hukum dasar hidrodinamika aliran sungai yang dalam hal ini adalah persamaan kontinuitas dan momentum. Metode beda hingga eksplisit-Leap frog merupakan salah alat bantu yang sangat bermanfaat dalam penyusunan model matematik yang menjembatani struktur matematik ke arah pemograman komputer, sehingga tercipta suatu model visualisasi.

DAFTAR PUSTAKA

- Benedetti L and Sforzi F (1999). **Dynamic Integrated Modelling : A Case Study on the Lambro Catchment.** Faculty Of Agricultural And Applied Biological Sciences, Universiteit Gent, Belgium
- Pratikto W.A. (1988). **Hidrodinamika Dasar.** Teknik Kelautan, ITS, Surabaya.
- Slamet. A dan Karnaningroem. N. (2003). **Pengaruh Hidrodinamika pada Penyebaran Polutan di Sungai dengan Aliran Horizontal 2 Dimensi.** Teknik Lingkungan, ITS, Surabaya.
- Triatmodjo. B.,(2002), **Metode Numerik.** Beta Offset, Yogyakarta
- Widodo B. dan Wardhani (1994). **Penerapan Metode Beda Hingga Pada Penyelesaian Persamaan Aliran Dan Angkutan Polutan Dimensi Satu.** Jurusan Matematika FMIPA, ITS, Surabaya